バナッハ空間の非拡大型非線形写像に関する双対定理 (函数解析学による一般化エントロピーの新展開)

茨木, 貴徳

数理解析研究所講究録
第1852巻 2013年 1-7

バナッハ空間の非拡大型非線形写像に関する双対定理

DUALITY THEOREMS FOR NONLINEAR MAPPNGS OF NONEXPANSIVE TYPE IN BANACH SPACES

茨木貴徳 TAKANORI IBARAKI

鶴岡工業高等専門学校 総合科学科
DEPARTMENT OF GENERAL SCIENCE,
TSURUOKA NATIONAL COLLEGE OF TECHNOLOGY

1. はじめに

H を実ヒルベルト空間とし, C をその空でない閉凸集合とする. このとき, H の任意の元 x に対して

$$\|x-z\|=\min\{\|x-y\|:y\in C\}$$

となるような C の元 z が一意に存在する. このことはよく知られた事実である. そこで H の任意の元 x に対して, このような元 z を対応させる写像を P_C で表し, P_C を H から C の上への距離射影 (metric projection) と呼ぶことにする. この距離射影 P_C は, 次の重要な性質を持っている. すなわち, $z=P_Cx$ であることの必要十分条件は, C の任意の元 y に対して

$$\langle x-z,z-y\rangle\geq 0 \tag{1.1}$$

が成り立つことである. この性質を用いると, P_C は 非拡大写像 (nonexpansive mapping), すなわち, H の任意の元 x, y に対して

$$\|P_Cx-P_Cy\|\leq\|x-y\|$$

であることがわかる.

一方, 距離射影の概念はバナッハ空間の場合にも拡張される. バナッハ空間での距離射影 (metric projection) とサニー非拡大射影 (sunny nonexpansive retraction) の2つの射影は古くから知られていた. 1996年に Alber [1] が準距離射影 (generalized projection) の概念を, 2007年に茨木-高橋 [5,6] がサニー準非拡大射影 (sunny generalized nonexpansive retraction) の概念を導入した. これらの射影はヒルベルト空間上の距離射影の自然な拡張になっている. さらに, これらの非線形射影はヒルベルト空間と同様に非拡大の性質を持っている.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 46B10, Secondary 47H09, 47H10.
Key words and phrases. 擬非拡大写像, 準非拡大写像, 準距離射影, サニー準非拡大射影, 不動点.

距離射影	$\Rightarrow$	距離写像 (metric operator)
準距離射影	$\Rightarrow$	擬非拡大写像 (relatively nonexpansive mapping)
サニー非拡大射影	$\Rightarrow$	非拡大写像 (nonexpansive mapping)
サニー準非拡大射影	$\Rightarrow$	準非拡大写像 (generalized nonexpansive mapping)

本論文では, 準距離射影とサニー準非拡大射影およびそれぞれの非拡大性について議論する. まず始めに準距離射影とサニー準非拡大射影を定義し, それら射影の性質について議論する. 次に, それぞれの非拡大性である擬非拡大写像と準非拡大写像を定義し, それらの双対定理に関して議論する.

2. 準備

E を実バナッハ空間とし, E^* をその共役空間とする. E が狭義凸 (strictly convex) であるとは, $\|x\| = \|y\| = 1$ となる E の元 x, y $(x \neq y)$ に対して, つねに $\|x + y\| < 2$ が成り立つことである.

バナッハ空間 E の元 x に対して, E^* の部分集合

$$Jx := \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

を対応させる写像 J のことを, E の双対写像 (normalized duality mapping) と呼ぶ.

この双対写像 J は E のノルムの微分可能性とも大いに関わりをもつ. いま $S(E) := \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とするとき, $S(E)$ の元 x, y に対して, 次の極限を考える.

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{2.1}$$

バナッハ空間 E のノルムがガトー微分可能 (Gâteaux differentiable) であるとは, $S(E)$ の元 x, y に対して, つねに (2.1) が存在するときをいう. このとき, 空間 E は滑らか (smooth) であるともいう. バナッハ空間 E での双対写像 J とノルムの微分可能性に関しては次の性質が知られている ([2,17,18] を参照).

(1) E の元 x に対して, Jx は空でない有界な閉凸集合である;
(2) E が狭義凸であるための必要十分条件は, J が 1 対 1 となることである. すなわち, $x \neq y \;\Rightarrow\; Jx \cap Jy = \emptyset$;
(3) E が回帰的で滑らかで狭義凸なバナッハ空間なら, E^* の双対写像 J_* は J の逆像となる. すなわち, $J_* = J^{-1}$ である;
(4) E が回帰的であるための必要十分条件は, J が全射となることである;
(5) E が滑らかであるための必要十分条件は, J が一価になることである;

多価写像 $A \subset E \times E^*$ に対して, A の定義域 (domain) と A の値域 (range) は

$$D(A) = \{x \in E : Ax \neq \emptyset\}, \; R(A) = \cup\{Ax : x \in D(A)\}$$

で定義される. 多価写像 $A \subset E \times E^*$ が単調作用素 (monotone operator) であるとは, 任意の $(x, x^*), (y, y^*) \in A$ に対して

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$$

がつねに成り立つことと定義する. 多価写像 A が狭義単調作用素 (strictly monotone operator) であるとは, 任意の $(x, x^*), (y, y^*) \in A (x \neq y)$ に対して

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle > 0$$

がつねに成り立つことと定義する. また, 単調作用素 A が極大 (maximal) であるとは, A を真に含む単調作用素 $B \subset E \times E^*$ が存在しないときいう. すなわち, $B \subset E \times E^*$ が単調作用素で, かつ $A \subset B$ であるならば, $A = B$ となるときをいう. A が極大単調作用素ならば, $A^{-1}0 = \{u \in E : 0 \in Au\}$ は閉凸集合となる. また, 極大単調作用素には次の結果が知られている ([2, 18] 等を参照).

定理 2.1. *E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, $A \subset E \times E^*$ を単調作用素とする. このとき, A が極大になるための必要十分条件は, 任意の $\lambda > 0$ に対して, $R(J + \lambda A) = E^*$ となることである.*

3. 準距離射影とサニー準非拡大射影

E を滑らかなバナッハ空間とし, J を E から E^* への双対写像とする. このとき E の任意の 元 x, y に対して

$$V(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy \rangle + \|y\|^2$$

で $E \times E$ から $\mathbb{R}$ への関数 V を定義する. この関数 V に関しては次のような性質が知られている ([1, 10, 14] を参照).

(1) $x, y \in E$ に対して, $(\|x\| - \|y\|)^2 \leq V(x, y) \leq (\|x\| + \|y\|)^2$ である;
(2) $x, y, z \in E$ に対して, $V(x, y) = V(x, z) + V(z, y) + 2\langle x - z, Jz - Jy \rangle$ である;
(3) E が狭義凸ならば, E の元 x, y に対して, $V(x, y) = 0$ であるための必要十分条件は $x = y$ である.

C を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間 E の空でない閉凸集合とする. このとき E の任意の元 x に対して, 唯一つ z が存在し

$$V(z, x) = \min_{y \in C} V(y, x)$$

が成り立つことが知られている. そのような点 z は $\Pi_C x$ と表され, Π_C は E から C の上への準距離射影 (generalized projection) と呼ばれる ([1, 10] を参照). 準距離射影の不動点集合はもちろん C である. また, 準距離射影には次の結果が知られている.

補助定理 3.1 ([1, 10]). *C を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間 E の空でない閉凸集合とし, (x, z) を $E \times C$ の元とする. このとき, 次の性質が成立する.*

(1) $z = \Pi_C x$ になる必要十分条件は, C の 任意の元 y に対して

$$\langle z - y, Jx - Jz \rangle \geq 0$$

が成り立つことである;

(2) $V(z, \Pi_C x) + V(\Pi_C x, x) \leq V(z, x)$.

E をバナッハ空間とし, D を E の空でない集合とする. このとき, E から D への写像 R がサニー (sunny) であるとは, E の任意の元 x と任意の $t \geq 0$ に対して

$$R(Rx + t(x - Rx)) = Rx$$

が成り立つことである. 同様に, E から D への写像 R が射影 (retraction) であるとは, D の任意の元 x に対して, $Rx = x$ が成り立つことである. これらの写像に関して次の補助定理が知られている.

補助定理 3.2 ([5,6]). E を滑らかで狭義凸なバナッハ空間とし, D を E の空でない集合とする. また R_D を E から D の上への射影とする. このとき, R_D がサニーかつ準非拡大写像になる必要十分条件は, E の任意の元 x と D の任意の元 y に対して,

$$\langle x - R_D x, JR_D x - Jy \rangle \geq 0$$

となることである. ただし, J は E の双対写像である.

E が滑らかで狭義凸なバナッハ空間とし, D を空でない集合とする. このとき, E から D の上へのサニー準非拡大射影 (sunny generalized nonexpansive retraction) は存在すれば一意に決まる. そこで, 滑らかで狭義凸なバナッハ空間の場合に, E から D の上へのサニー準非拡大射影を R_D で表すことにする. D を E の空でない集合とする. このとき, D が E のサニー準非拡大レトラクト (sunny generalized nonexpansive retract) であるとは, E から D の上へのサニー準非拡大射影が存在するときと定義する. サニー準非拡大射影の不動点集合はもちろん D である ([5,6] を参照). サニー準非拡大射影とサニー準非拡大レトラクトに関しては次の結果が知られている.

補助定理 3.3 ([6]). E を滑らかで狭義凸なバナッハ空間とし, D を E の空でないサニー準非拡大レトラクトとする. R_D を E から D の上へのサニー準非拡大射影とし, (x, z) を $E \times D$ の元とする. このとき次の性質が成立する.

(1) $z = R_D x$ になる必要十分条件は, D の任意の元 y に対して

$$\langle x - z, Jz - Jy \rangle \geq 0$$

となることである;

(2) $V(R_D x, z) + V(x, R_D x) \leq V(x, z)$.

定理 3.4 ([12]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, D を E の空でない集合とする. このとき次の条件は同値になる.

(1) D はサニー準非拡大レトラクトである;

(2) JD は閉凸集合である.

このとき, D は閉集合となる.

また, 準距離射影と準非拡大射影に関して次の結果が知られている.

定理 3.5 ([12]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, C^* を E^* の空でない閉凸集合とする. Π_{C_*} を E^* から C^* の上への準距離射影とし, E から E への写像 R を

$$R := J^{-1}\Pi_{C_*}J$$

で定義する. このとき, R は E から $J^{-1}C_*$ の上へのサニー準非拡大射影になる.

4. 非拡大型非線形写像に関する双対定理

C を 実バナッハ空間 E の空でない集合とし, T を C から C への写像とする. このとき $F(T)$ は写像 T の不動点 (fixed point) の集合, すなわち $F(T) = \{z \in C : Tz = z\}$ である. C の元 p が T の 漸近的不動点 (asymptotic fixed point) であるとは, x_n が p に弱位相の意味で収束し $\lim_n(x_n - Tx_n) = 0$ を満たす点列 $\{x_n\} \subset C$ が存在することと定義する. このとき, T の漸近的不動点の集合を $\hat{F}(T)$ で表す. 同様に, C の元 p が T の 準漸近的不動点 (generalized asymptotic fixed point) であるとは, Jx_n が Jp に弱 * 位相の意味で収束し $\lim_n(Jx_n - JTx_n) = 0$ を満たす点列 $\{x_n\} \subset C$ が存在することと定義する. このとき, T の準漸近的不動点の集合を $\check{F}(T)$ で表す.

C を E の空でない閉凸集合とする. このとき, C から C への写像 T が擬非拡大写像 (relatively nonexpansive mapping) であるとは, $F(T) = \hat{F}(T) \neq \emptyset$ かつ C の任意の元 x と $F(T)$ の任意の元 y に対して,

$$V(y, Tx) \leq V(y, x)$$

がつねに成り立つことと定義する ([13, 14] を参照).

D を E の空でない集合とする. このとき, D から D への写像 T が準非拡大写像 (generalized nonexpansive mapping) であるとは, $F(T) \neq \emptyset$ かつ D の任意の元 x と $F(T)$ の任意の元 y に対して,

$$V(Tx, y) \leq V(x, y)$$

がつねに成り立つことと定義する ([5, 6] を参照)

次にそれぞれの非拡大型写像の具体例を考察する: E を回帰的で滑らかで狭義凸なバナッハ空間とし, その共役空間を E^* とする. このとき, 単調作用素 $A \subset E \times E^*$ が極大ならば, 任意の $r > 0$ に対して, $E^* = R(J + rA)$ である (定理 2.1 を参照). ここで, 任意の $r > 0$ と E の任意の元 x に対して

$$\Pi_r x = \{z \in E : x \in Jz + rAz\}$$

とすると, $\Pi_r x$ は一価となる. このとき, Π_r は $(J+rA)^{-1}$ で記述される. このような Π_r を A の擬リゾルベント (relative resolvent) と呼ぶこととする. このとき, 擬リゾルベントは擬非拡大写像になる. また, 前節で扱った準距離射影も擬非拡大写像となる ([9–11, 13, 14] を参照).

E を回帰的で滑らかで狭義凸なバナッハ空間とし, その共役空間を E^* とする. このとき, 単調作用素 $B \subset E^* \times E$ が極大ならば, 任意の $r>0$ に対して, $E = R(I+rBJ)$ である ([6, 命題 4.1] を参照). ここで, 任意の $r>0$ と E の任意の元 x に対して

$$R_r x = \{z \in E : x \in z + rBJz\}$$

とすると, $R_r x$ は一価となる. このとき, R_r は $(I+rBJ)^{-1}$ で記述される. このような R_r を B の準リゾルベント (generalized resolvent) と呼ぶこととする. このとき, 準リゾルベントは準非拡大写像になる ([6, 7] を参照).

最後に, 擬非拡大写像と準非拡大写像の双対定理を議論する: E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間, J を E の双対写像とし, T を E から E への写像とする. このとき, E^* の任意の元 x^* に対し E^* から E^* への写像 T^* を

$$T^*x^* := JTJ^{-1}x^* \tag{4.1}$$

で定義する ([4] を参照). この写像を利用して次の結果が得られる.

定理 4.1 ([4]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間, J を E の双対写像とし, T を E から E へに写像とする. T^* を (4.1) で定義された写像とする. このとき, 次の性質が成り立つ.

(1) $JF(T) = F(T^*)$;
(2) $J\hat{F}(T) = \check{F}(T^*)$;
(3) $J\check{F}(T) = \hat{F}(T^*)$.

また, 擬非拡大写像と準非拡大写像に関して次の結果を得る (関連の研究として [3, 15, 19] 等を参照).

定理 4.2 ([4]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間, J を E の双対写像とし, T を E から E への擬非拡大写像とする. T^* を (4.1) で定義された写像とする. このとき T^* は準非拡大写像で $\check{F}(T^*) = F(T^*)$ を満たす.

定理 4.3 ([4]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間, J を E の双対写像とし, T を E から E への準非拡大写像で $\check{F}(T) = F(T)$ を満たすとする. T^* を (4.1) で定義された写像とする. このとき T^* は擬非拡大写像となる.

謝辞. 本研究は JSPS 科研費 24740075 の助成を受けたものです.

参考文献

[1] Ya. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, Dekker, New York, 1996, 15–50.

[2] I. Cioranescu, *Geometry of Banach spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems* Kluwer Academic Publishers, Dordecht, 1990.

[3] S. Dhompongsa, W. Fupinwong, W. Takahashi and J.-C. Yao, *Fixed point theorems for nonlinear mappings and strict convexity of Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **11**, (2010), 175–183.

[4] T. Honda, T. Ibaraki and W. Takahashi, *Duality theorems and convergence theorems for nonlinear mappings in Banach spaces and applications*, Int. J. Math. Stat. **6** (2010), 46–64.

[5] 茨木貴徳・高橋渉, 「バナッハ空間における新しい射影に関する収束定理」京都大学数理解析研究所講究録 **1484** (2006), 150–160.

[6] T. Ibaraki and W. Takahashi, *A new projection and convergence theorems for the projections in Banach spaces*, J. Approx. Theory **149** (2007), 1–14.

[7] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for new resolvents of maximal monotone operators in Banach spaces*, Adv. Math. Econ. **10** (2007), 51–64.

[8] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive mappings and a proximal-type algorithm in Banach spaces*, Nonlinear Analysis and Optimization, Contemp. Math., **513**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, 169–180.

[9] S. Kamimura, F. Kohsaka and W. Takahashi, *Weak and strong convergence Theorems for maximal monotone operators in a Banach space*, Set-Valued Analysis, **12** (2004), 417–429.

[10] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945.

[11] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Strong convergence of an iterative sequence for maximal monotone operators in a Banach space*, Abstr. Appl. Anal. **2004** (2004), 239–249.

[12] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive retractions and a proximal-type algorithm in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 197–209.

[13] S. Matsushita and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in Banach space*, Fixed Point Theory Appl. **2004** (2004), 37–47.

[14] S. Matsushita and W. Takahashi, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in Banach space*, J. Approx. Theory **134** (2005), 257–266.

[15] W. Nilsrakoo and S. Saejung, *On the fixed-point set of a family of relatively nonexpansive and generalized nonexpansive mappings*, Fixed Point Theory Appl. **2010** (2010) Article ID 414232, 14pp.

[16] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distances* Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 178, Dekker, New York, 1996, 313–318.

[17] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis – Fixed Point Theory and Its Applications*, Yokohama Publishers, 2000.

[18] 高橋渉, 凸解析と不動点近似, 横浜図書, 2000.

[19] W. Takahashi and J.-C. Yao, *Nonlinear operators of monotone type and convergence theorems with equilibrium problems in Banach spaces*, Taiwanese J. Math. **15** (2011), 787–818.